OLIMPIADA DE MATEMATICA
Etapa locala 13.02.2010
CLASA a VIII a

SUBIECTUL I

Demonstrati ca daca $x, y, z \in (0, \infty)$, atunci

$$\frac{x^2+xy+y^2}{y+z}+\frac{y^2+yz+z^2}{z+x}+\frac{z^2+zx+x^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}(x+y+z)$$

Calin Burdusel

SUBIECTUL II

Fie $a, b \in N^*$. Demonstrati ca ecuatia $(n+23)^a=(n+5)^b$ are solutii $n \in N^*$, daca si numai daca $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$

Calin Burdusel

SUBIECTUL III

a) Demonstrati ca $x^4-4x+3\geq 0, (\forall)x\in R$ si ca $x^3-3x+2\geq 0, (\forall)x\in[-2,\infty)$

b) Folosind eventual a) demonstrati ca daca $a, b, c, d \in [-2, \infty)$, astfel incat $a+b+c+d=5$, atunci $a^3+b^3+c^3+d^3\geq 7$ si $a^4+b^4+c^4+d^4\geq 8$

Calin Burdusel

SUBIECTUL IV

Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ avand muchia a. Consideram punctele $M\in(BB')$, $N\in(CC')$, $P\in(DD')$. Notam cu R perimetrul pentagonului $AMNPA'$. Demonstrati ca $R\geq a\sqrt{17}+a$ si precizati pozitiile punctelor M, N, P pentru care se realizeaza egalitatea.

Calin Burdusel

NOTA: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect este cotat cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.