Inspectoratul Şcolar Județean Dâmbovița
Societatea de Ştiințe Matematice din România – Filiala Dâmbovița

A 62-a Ediție a Olimpiadei Naționale de Matematică
Baraj Dâmbovița - 21 Martie 2011

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Fie triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ cu centrul cercului circumscris și ortocentrul notate cu O_1, H_1, respectiv O_2, H_2. Demonstrați că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ au același centru de greutate dacă și numai dacă $\overrightarrow{H_1H_2} + 2\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{0}$.

Subiectul 2. Fie $a_0 = 0$ și $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Demonstrați că dacă n este o putere a lui 2, atunci și a_n este putere a lui 2.

Subiectul 3. Fie $a, b, c, m, n, p, u, v, t$ numere reale astfel încât $b, c, m, p, u, v < 0$, $a, n, t > 0$, $a + b + c > 0, m + n + p > 0, u + v + t > 0$. Demonstrați că dacă

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ mx + ny + pz = 0 \\ ux + vy + tz = 0 \end{cases},$$

atunci $x = y = z = 0$.

Subiectul 4. Fiecare elev dintr-un grup de 17 elevi discută cu toți ceilalți pe rând. Există trei teme de discuții, iar când se întâlnesc doi elevi, ei își aleg exact o temă din cele trei despre care discută. Demonstrați că există trei elevi care atunci când s-au întâlnit doi câte doi, au discutat numai despre aceeași temă.

A 62-a Ediție a Olimpiadei Naționale de Matematică
Baraj Dâmbovița - 21 Martie 2011

BAREM CLASA A IX-A

Subiectul 1. (2 puncte) Dacă $\overrightarrow{G_1O_1} = u,\ \overrightarrow{G_2O_2} = v$, atunci $\overrightarrow{G_1H_1} = -2u,\ \overrightarrow{G_2H_2} = -2v$

(2 puncte) $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{O_1G_1} + \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2O_2} = \overrightarrow{G_1G_2} - u + v$

(2 puncte) $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{H_1G_1} + \overrightarrow{G_1G_2} + \overrightarrow{G_2H_2} = \overrightarrow{G_1G_2} + 2u - 2v$

(1 punct) Finalizare, cu concluzia $\overrightarrow{G_1G_2} = 0$.

Subiectul 2. (4 puncte) $a_n = n2^{n-1}$ cu demonstrație (eventual inducție)

(3 puncte) Finalizare

Subiectul 3. (1 punct) Presupunem fără restrângerea generalității că $|x| \geq |y| \geq |z|$.

Presupunem prin absurd că $|x| > 0$. Din prima ecuație, avem

$$0 = |x| \cdot \left|a + b \cdot \frac{y}{x} + c \cdot \frac{z}{x}\right| \quad (\mathbf{2\ puncte})$$

$$\geq |x| \cdot \left(|a| - |b| \cdot \left|\frac{y}{x}\right| - |c| \cdot \left|\frac{z}{x}\right|\right) \quad (\mathbf{2\ puncte})$$

$$\geq |x| \cdot (a - |b| - |c|) = |x| \cdot (a + b + c) > 0, contradicție \quad (\mathbf{2\ puncte}).$$

Subiectul 4. (2 puncte) Fie T1, T2, T3 cele trei teme de discuție. Fie A un elev oarecare.

Conform principiului Dirichlet, există o temă, să zicem T3, despre care A a discutat cu 6 elevi.

(2 puncte) Dacă doi dintre acești 6 elevi au discutat între ei despre T3, problema este rezolvată.

(1 punct) Presupunem acum că acești 6 elevi au discutat numai despre T1 și T2. Fie B unul dintre acești elevi. Conform principiului Dirichlet, B a discutat cu trei elevi despre aceeași tema, să zicem T2.

(1 punct) Dacă doi dintre acești trei elevi au discutat despre T2, problema este rezolvată.

(1 punct) Altfel, acești 3 elevi au discutat despre T1 și problema este rezolvată.