

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ 2011 CLASA a V-a**

**BAREM DE CORECTARE**

**Subiect 1**

- a)  $m - n = 31 + 34 + 37 + (40 - 38) + (43 - 41) + \dots + (97 - 95) + (100 - 98) =$   
 $= 102 + \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{21 \text{ termeni}} = 102 + 42 = 144. \dots \dots \dots \underline{3 \text{ puncte}}$
- (sau calculul lui m: 1punct, calculul lui n: 1punct, calcul m-n: 1punct)
- $2 \cdot m - 2 \cdot n + 20 = 288 + 20 = 308. \dots \dots \dots \underline{2 \text{ puncte}}$
- b)  $30 \cdot m - 2 \cdot n + 21 = 28 \cdot m + 2 \cdot m - 2 \cdot n + 20 + 1 = 28 \cdot m + 308 + 1 = \mathcal{M}_7 + 1. \dots \dots \dots \underline{1 \text{ punct}}$   
 Restul împărțirii este 1.  $\dots \dots \dots \underline{1 \text{ punct}}$

**Subiect 2**

- $a = 2^{6n+2} + 4^{3n+2} + 8^{2n+1} = 2^{6n+2} + 2^{6n+4} + 2^{6n+3} = 2^{6n+2} (1 + 4 + 2) = 2^{6n+2} \cdot 7. \dots \dots \dots \underline{2 \text{ puncte}}$
- a) Cel mai mic număr p, astfel încât p · a să fie pătrat perfect este  $p = 7$ , având  $p \cdot a = 2^{6n+2} \cdot 7 \cdot 7 = (2^{3n+1} \cdot 7)^2$ , pătrat perfect.  $\dots \dots \dots \underline{3 \text{ puncte}}$
- b) Cel mai mic număr p, astfel încât p · a să fie cub perfect este  $p = 2 \cdot 7^2 = 98$ , având  $p \cdot a = 2^{6n+3} \cdot 7^3 = (2^{2n+1} \cdot 7)^3$ , cub perfect.  $\dots \dots \dots \underline{2 \text{ puncte}}$

**Subiect 3**

- a) În produs sunt:  
 402 numere divizibile cu 5:  $\dots \dots \dots \underline{1 \text{ punct}}$   
 80 numere divizibile cu 25,  $\dots \dots \dots \underline{1 \text{ punct}}$   
 15 numere divizibile cu 125, și 3 numere divizibile cu 625.  $\dots \dots \dots \underline{1 \text{ punct}}$   
 În total sunt  $402 + 80 + 16 + 3 = 501$  factori de 5, cum numărul factorilor de 2 este mai mare, rezultă că numărul P se termină în 501 cifre de 0.  $\dots \dots \dots \underline{2 \text{ puncte}}$
- b) La fiecare grupă de câte 20 de numere, după eliminarea multiplilor de 2 și de 5, ultima cifră este 1, deci până la 2000 ultima cifră a produsului numerelor rămase este 1.  $\dots \dots \dots \underline{1 \text{ punct}}$   
 Ultima cifră a produsului numerelor rămase în P este dat de  $u(2001 \cdot 2003 \cdot 2007 \cdot 2009 \cdot 2011) = 9. \dots \dots \dots \underline{1 \text{ punct}}$

**Subiect 4 .**

- Cele patru numere se pot reprezenta: III:  $3x$ , IV:  $4x$ , I:  $3 \cdot 3x + 3 = 9x + 3$  și II:  $4 \cdot 4x + 4 = 16x + 4. \dots \dots \dots \underline{2 \text{ puncte}}$   
 Se obține ecuația:  $9x + 3 + 16x + 4 + 3x + 4x = 999. \dots \dots \dots \underline{2 \text{ puncte}}$   
 De unde  $x = 31. \dots \dots \dots \underline{1 \text{ punct}}$   
 Numerele sunt: 282, 500, 93, 124.  $\dots \dots \dots \underline{2 \text{ puncte}}$   
 Obs. Problema se rezolvă și prin metoda grafică.

BAREM DE CORECTARE

**Subiect 1.**

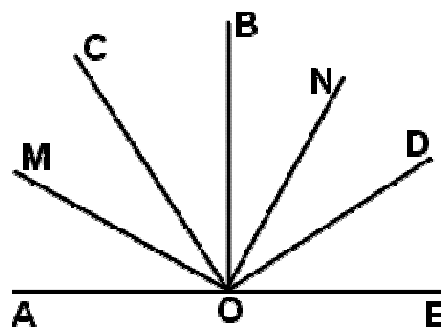
- $x^2y = 216 - xz \Leftrightarrow x^2y + xz = 216 \Leftrightarrow x(xy + z) = 216$ ..... 1 punct  
 Cum  $x \mid 216$  și  $x$  prim, rezultă  $x \in \{2, 3\}$ ..... 2 puncte  
 Dacă  $x = 2$  se obține  $2y + z = 108$ . Dar  $2y$  și  $108$  sunt pare, rezultă  $z$  este par, fiind și prim, rezultă  $z = 2$  și apoi se obține  $y = 53$ . ..... 2 puncte  
 Dacă  $x = 3$  se obține  $3y + z = 72$ . Dar  $3y$  și  $72$  sunt divizibile cu 3, rezultă  $z$  este divizibil cu 3, fiind și prim, rezultă  $z = 3$  și apoi se obține  $y = 23$ ..... 2 puncte  
 Tripletele sunt:  $(2, 53, 2)$  și  $(3, 23, 3)$ .

**Subiect 2**

- Dacă  $A = \overline{bca} + \overline{cab}$ , atunci  $\overline{abc} + A = 111(a + b + c) = \mathcal{M}_{37}$ , cum  $\overline{abc} \div 37$ , rezultă  $A \div 37$ ..... 2 puncte  
 Dacă  $B = 2 \cdot \overline{bca} + 3 \cdot \overline{cab}$ , atunci  $13 \cdot \overline{abc} + B = 1300a + 130b + 13c + 200b + 20c + 2a + 300c + 30a + 3b = 1332a + 333b + 333c = 37(36a + 9b + 9c) = \mathcal{M}_{37}$ , cum  $\overline{abc} \div 37$ , rezultă  $B \div 37$ . ..... 4 puncte  
 În concluzie fracția este reductibilă..... 1 punct

**Subiect 3**

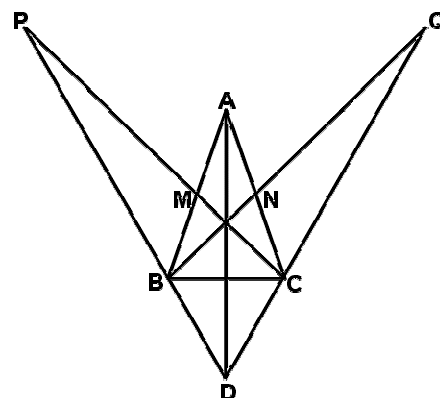
- a)  $m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle COM) + m(\sphericalangle COB) + m(\sphericalangle BON) =$   
 $\frac{m(\widehat{AOC})}{2} + m(\widehat{COB}) + \frac{m(\widehat{BOD})}{2} = \frac{m(\widehat{AOC}) + 2 \cdot m(\widehat{COB}) + m(\widehat{BOD})}{2} =$   
 $\frac{m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) + m(\widehat{COB}) + m(\widehat{BOD})}{2} = \frac{90^\circ + 90^\circ}{2} = 90^\circ$ .  
 ..... 3 puncte



- b) Dacă notăm  $m(\sphericalangle DOE) = 3x$ ,  $m(\sphericalangle AOC) = 5x$ , se obține ecuația:  $8x = 90^\circ$ , de unde  $x = 11^\circ 15'$ . ..... 2 puncte  
 Și atunci  $m(\sphericalangle DOE) = m(\sphericalangle COB) = 33^\circ 45'$  și  $m(\sphericalangle BOD) = m(\sphericalangle AOC) = 56^\circ 15'$ . ..... 2 puncte

**Subiect 4**

- 1)  $\triangle ABN \cong \triangle ACM$  (LUL), rezultă  $BN = CM$ ..... 2 puncte  
 2)  $\triangle PBM \cong \triangle QCN$  (LUL). ..... 2 puncte  
 3)  $\triangle DPC \cong \triangle DQB$  (ULU), rezultă  $DB = DC$ ..... 2 puncte  
 4)  $\triangle DAB \cong \triangle DAC$  (LLL), rezultă  $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle DAC$  și deci  $[AD]$  este bisectoarea unghiului BAC. .... 1 punct  
**Variantă:** 3')  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ACB$  ( $AB = AC$ ). (1 punct) Din 2 și 3'), rezultă  $\sphericalangle DBC \cong \sphericalangle DCB$ , de unde  $DB = DC$ . (1 punct) Apoi 4)  $\triangle DAB \cong \triangle DAC$  (LLL), rezultă  $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle DAC$  și deci  $[AD]$  este bisectoarea unghiului BAC. .... (1 punct)



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ 2011 CLASA a VII-a**  
**BAREM DE CORECTARE**

**Subiect 1**

a)  $2025 = 45^2$ ,  $1092025 = 1045^2$ ..... **2 puncte**

b)  $\overline{n045}^2 = (1000n + 45)^2 = 10^6 n^2 + 90000n + 45^2 = \overline{a0000} + 2025 = \overline{a2025}$ , pătrat perfect care se termină cu 2025, unde n este orice număr natural nenul..... **5 puncte**

**Subiect 2**

a) Problema revine la a scrie 1010 ca sumă de două pătrate. Exemple de soluții ce se pot da: (29, 13), (31, 7), (-29, 13), ..... **2 puncte**

b)  $x^2 + y^2 = 10(100 + z^2) = (9 + 1)(100 + z^2) = (3z + 10)^2 + (z - 30)^2$  (o variantă)..... **3 puncte**

Și atunci dacă luăm  $x = 3z + 10$ ,  $y = z - 30$ , arată că orice triplet de forma  $(3z + 10, z - 30, z)$ , unde  $z \in \mathbb{Z}$ , este soluție a ecuației date..... **2 puncte**

**Subiect 3**

a) N este centrul de greutate în  $\Delta ABC$ , de unde  $ND = 2 \cdot NB$  și atunci  $BD = 4,5$  cm,..... **2 puncte**

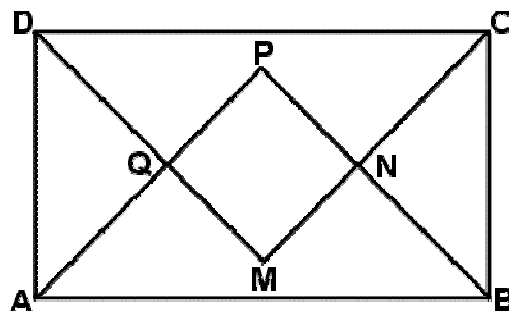
dar rombul având  $m(\hat{A}) = 60^\circ$ , rezultă perimetrul este de  $4,5 \text{ cm} \cdot 4 = 18$  cm. .... **2 puncte**

b) Dacă se notează cu S = aria triunghiului BMN, atunci  $A_{BCN} = 2S$ ,  $A_{BCM} = 2S$ , apoi  $A_{ABC} = 6S$  și  $A_{ABCD} = 12S$ , rezultă că raportul dintre aria triunghiului BMN și aria rombului este  $1/12$ ..... **3 puncte**

**Subiect 4**

a)  $\Delta ABP$ ,  $\Delta DCM$ ,  $\Delta BCN$ ,  $\Delta ADQ$  sunt dreptunghice isoscele, rezultă patrulaterul MNPQ are unghiurile drepte, deci este dreptunghi..... **2 puncte**

Apoi  $PA = PB$  și  $AQ = BN$  ( $\Delta BCN \cong \Delta ADQ$ ), rezultă  $PN = PQ$  și atunci MNPQ este pătrat..... **2 puncte**



b)  $A_{ACM} + A_{ACN} = A_{AMN}$  ..... **1 punct**,

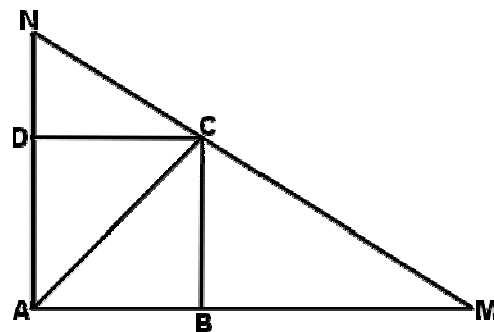
rezultă  $AM \cdot BC + AN \cdot DC = AM \cdot AN$ , de unde .

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{BC} = \text{constant} \dots\dots\dots \mathbf{2 \text{ puncte}}$$

**Obs.** Se poate da soluția bazată pe teorema fundamentală a asemănării care se aplică și în cazul general când ABCD este romb.

DC || AM, rezultă  $\Delta NDC \sim \Delta NAM$ , de unde  $\frac{DC}{AM} = \frac{NC}{MN}$ .

BC || AN, rezultă  $\Delta MBC \sim \Delta MAN$ , de unde  $\frac{BC}{AN} = \frac{MC}{MN}$ .



Prin adunarea celor două relații, membru cu membru se obține  $\frac{DC}{AM} + \frac{BC}{AN} = \frac{NC + MC}{MN} = 1$ . DC=BC, rezultă

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{BC} = \text{constant} .$$

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ 2011 CLASA a VIII-a**  
**BAREM DE CORECTARE**

**Subiectul 1**

$(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 16$ , ..... **2 puncte**

rezultă  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = 16$ . Și atunci  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 6 = 20$  ..... **2 puncte**

Apoi  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 6 = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 + 4 = 196 + 4 = 200$ . ..... **3 puncte**

Obs. Calculul se poate obține dacă se deduce din condiția dată că  $a = 2 + \sqrt{3}$  și  $b = 2 - \sqrt{3}$ , sau invers.

**Subiectul 2**

a)  $x^2 - 11x = k^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 44x = 4k^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 44x + 121 - 4k^2 = 121 \Leftrightarrow (2x - 11)^2 - 4k^2 = 121 \Leftrightarrow (2x - 11 - 2k)(2x - 11 + 2k) = 121$ . ..... **1 punct**

Scriind toate sistemele care se formează se obține  $A = \{-25, 0, 11, 36\}$ . ..... **2 puncte**

b)  $x^2 - (2n + 1)x = k^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4(2n + 1)x = 4k^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4(2n + 1)x + (2n + 1)^2 - 4k^2 = (2n + 1)^2 \Leftrightarrow (2x - 2n - 1 - 2k)(2x - 2n - 1 + 2k) = (2n + 1)^2$ . ..... **2 puncte**

O soluție pătrat perfect nenul se obține luând  $2x - 2n - 1 - 2k = 1$  și  $2x - 2n - 1 + 2k = (2n + 1)^2$ . Care dă  $x = (n + 1)^2$ . Sau pentru valorile negative dă  $x = -n^2$ . Pentru  $x = (n + 1)^2$  înlocuind dă  $(n + 1)^4 - (2n + 1)(n + 1)^2 = (n + 1)^2(n^2 + 2n + 1 - 2n - 1) = n^2(n + 1)^2$ , pătrat perfect nenul. .... **2 puncte**

**Subiectul 3**

a)  $BC' \parallel AD'$ , rezultă  $m(\widehat{BO, AD'}) = m(\widehat{BO, BC'}) = 30^\circ$ , deoarece BO este mediană în triunghiul echilateral  $BDC'$ . ..... **2 puncte**

b) Dacă notăm latura cubului cu a, atunci  $AO = \sqrt{AD^2 + OD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$  ..... **1 punct**

$AM = \sqrt{B'A^2 + B'M^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$ .  $OM = \frac{B'D}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  ..... **2 puncte**

Se obține ca  $AM^2 = AO^2 + OM^2$ , rezultă  $m(\sphericalangle AOM) = 90^\circ$ . ..... **2 puncte**

**Subiectul 4:**

a)  $MN = \sqrt{6^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ ,  $NP = \sqrt{6^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$  ... **1 punct**

Dacă  $\{Q\} = (MNP) \cap DD'$ , atunci patrulaterul MNPQ este romb și  $QN \parallel BD$ . Rezultă că dreapta de intersecție a planelor date este o dreaptă d paralelă cu BD ce conține punctul E, unde  $\{E\} = MP \cap AC$ . ..... **1 punct**

Cum  $BD \perp AC$ , atunci  $AC \perp d$ . Din teorema celor trei perpendiculare se obține că distanța este A'E.  $AM \parallel CP$ , rezultă  $\triangle EAM \sim \triangle ECP$  și se obține  $AE = 3\sqrt{2}$ , iar din  $\triangle A'AE$ ,  $A'E = 9\sqrt{2}$  ..... **2 puncte**

b) Distanța reprezintă lungimea înălțimii din C' pe MP ..... **1 punct**

Avem  $MP \cdot d(C', (MNP)) = C'P \cdot AC$ ;  $2\sqrt{22} \cdot d(C', (MNP)) = 6 \cdot 6\sqrt{2}$ ,

rezultă  $d(C', (MNP)) = \frac{18\sqrt{11}}{11}$  ..... **2 puncte**

Sau:  $\mathcal{A}_{AMN} \cdot d(C', (MNP)) = \mathcal{A}_{C'NP} \cdot d(M, (C'NP))$ .

